

$$\beta_{+-} = \frac{\hbar^2}{(2\pi)^3 4 m^3 c^4} \int d\vec{k} \varphi_+^*(\vec{k}) \vec{k} \cdot \int V(\vec{q}) \varphi_+(\vec{k} - \vec{q}) \vec{q} d\vec{q}. \quad (65)$$

Das zweite Integral hat nach (13) und (15) den Wert

$$-(2\pi)^{3/2} i \int \text{grad } V\psi e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} dr. \quad (66)$$

Dann läßt sich auch das Integral über  $\vec{k}$  auswerten:

$$\int \vec{k} \varphi_+^*(\vec{k}) d\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = (2\pi)^{3/2} i \text{grad } \psi, \quad (67)$$

so daß

$$\begin{aligned} \beta_{+-} &= \left(\frac{\hbar}{m c}\right)^2 \frac{1}{4 m c^2} \int \text{grad } \psi \cdot \text{grad } V\psi d\vec{r} \\ &= -\frac{1}{8 m c^2} \left(\frac{\hbar}{m c}\right)^2 \int \Delta V \psi^2 d\vec{r} \\ &= -\frac{4\pi e^2}{8 m c^2} \left(\frac{\hbar}{m c}\right)^2 \psi^2(0), \end{aligned} \quad (68)$$

wobei in der letzten Zeile für  $V$  speziell das Coulomb-Potential im Wasserstoffatom eingesetzt ist. Setzt man dann noch für  $\psi(0)$  den Wert (24) ein, so ergibt sich

$$\beta_{+-} = -\frac{1}{2} a^4 n^{-3}. \quad (69)$$

Dies ist von der Größenordnung (61); der Wert (69) wurde im vorigen Abschnitt benutzt.

## Der Absorptionskoeffizient an der langwelligen Grenze des kontinuierlichen Röntgenspektrums

Von GERHARD ELWERT\*

(Z. Naturforschg. 3a, 477—481 [1948]; eingegangen am 27. August 1948)

In der Astrophysik wird für den Absorptionskoeffizienten am langwelligen Rand des kontinuierlichen Röntgenspektrums teils die korrespondenzmäßig-klassische, teils eine wellenmechanische Formel verwendet. Im folgenden wird im Anschluß an Arbeiten von Sommerfeld ein Ausdruck abgeleitet, der diese beiden Formeln als Grenzfälle enthält und damit ihren Zusammenhang und ihren Gültigkeitsbereich klärt.

Bei der theoretischen Behandlung verschiedener Fragen der Astrophysik ist die Kenntnis der Grundvorgänge der Strahlungsemission und -absorption von Bedeutung. Zum Beispiel kommt das Gleichgewicht der Sternatmosphären durch das Zusammenwirken von Gravitation, Gas- und Strahlungsdruck zustande. Zur Berechnung des letzteren benötigt man den Wirkungsquerschnitt für Strahlungsemission bzw. -absorption, insbesondere für den Grundvorgang eines Strahlungsübergangs im kontinuierlichen Spektrum<sup>1</sup>.

Neuerdings spielt derselbe atomphysikalische Prozeß auch in der Theorie der kosmischen Kurzwellenstrahlung eine Rolle. Diese geht von spektroskopischen Beobachtungen aus, nach denen sich in der Milchstraße ein interstellares Gas befindet, das hauptsächlich aus ionisiertem Wasserstoff besteht.

Beim Zusammenstoß der freien Elektronen mit den Atomkernen muß sich dann derselbe Grundvorgang abspielen: Die Elektronen werden im Feld der Atomkerne abgelenkt und gebremst, es entsteht das kontinuierliche Röntgenspektrum. Seine Frequenzen sind nach unten hin nicht begrenzt. Bei der kosmischen Kurzwellenstrahlung beobachtet man nun den Frequenzbereich, der im Gebiet der Radiowellen liegt. Zur Berechnung der Energie der Strahlung braucht man, neben der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen, wieder den Wirkungsquerschnitt für Emission bzw. Absorption<sup>2</sup>.

Dieser Wirkungsquerschnitt  $\mu$  ist schon vor Aufstellung der Quantentheorie von Kramers<sup>3</sup> auf Grund des Korrespondenzprinzips aus der

<sup>1</sup> L. G. Henrey u. P. C. Keenan, Astrophys. J. 91, 625 [1940]; A. Unsöld, Naturwiss. 33, 37 [1946] u. 34, 184 [1947].

<sup>2</sup> H. A. Kramers, Philos. Mag. J. Sci. 46, 836 [1923].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Ausstrahlung auf klassischen Hyperbelbahnen berechnet worden. Es ergab sich

$$\mu = \frac{4\pi Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 h c} \frac{1}{v^3} \frac{1}{v} g(\gamma_0), \quad (1)$$

worin

$$g(\gamma_0) = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} i \gamma_0 H_{i\gamma_0}^{(1)}(i\gamma_0) H'_{i\gamma_0}^{(1)}(i\gamma_0), \quad (2)$$

mit

$$\gamma_0 = \frac{2\pi v Z e^2}{m v^3} = \frac{1}{2} \frac{v}{v_g} \sqrt{\frac{v_K}{v_g}}. \quad (3)$$

Dabei ist  $v_g$  die Grenzfrequenz und  $v_K$  die Ionisationsfrequenz der K-Schale, also

$$h v_g = \frac{1}{2} m v^2, \quad h v_K = \frac{2\pi^2 Z^2 e^4 m}{h^2}. \quad (4)$$

Für kleine Werte von  $\gamma_0$  erhält man

$$g'(\gamma_0) = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\zeta \gamma_0}{2}; \quad (5)$$

$\ln \zeta = C$  = Eulersche Konstante.

Andererseits fand Gaunt<sup>4</sup> später nach der Wellenmechanik

$$g = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{4 v_g}{v}. \quad (6)$$

Derselbe Ausdruck lässt sich auch aus einer Arbeit von Oppenheimer<sup>5</sup> ableiten, obwohl er in höherer Näherung rechnet als Gaunt. Maué<sup>6</sup> hat die korrespondenzmäßige und die wellenmechanische Rechnung unter Zugrundelegung von Sommerfelds<sup>7</sup> Arbeit über die Beugung und Bremsung der Elektronen verglichen. Er musste aber bei einem Grenzübergang auf eine genaue Berechnung frequenzunabhängiger Faktoren unter dem Logarithmus verzichten und fand dann ebenfalls das Ergebnis (6). Von verschiedenen Autoren wird teils der eine, teils der andere  $g$ -Faktor verwendet. In der Theorie des Sternaufbaus ist der genaue Funktionsverlauf infolge der Ungenauigkeit der astrophysikalischen Daten heute auch noch nicht wesentlich;  $g$  kann in erster Näherung als konstant betrachtet werden<sup>8</sup>. Hin-

<sup>4</sup> I. A. Gaunt, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A, **126**, 654 [1930].

<sup>5</sup> I. R. Oppenheimer, Z. Physik **55**, 725 [1929].

<sup>6</sup> A.-W. Maué, Ann. Physik **13**, 161 [1932].

<sup>7</sup> A. Sommerfeld, Ann. Physik **11**, 257 [1931].

<sup>8</sup> Vgl. auch die Ableitung von  $g$  in Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien Bd. II [1939], S. 558, bei der durch die Art der Näherung von dem  $g$ -Faktor abgesehen werden mußte.

gegen ist der Logarithmus für die Theorie der kosmischen Kurzwellenstrahlung von Interesse. Es ist deshalb wünschenswert, den  $g$ -Faktor genau zu kennen, d. h. zwischen (5) und (6) zu entscheiden<sup>9</sup>. In der wellenmechanischen Formel fehlt unter dem Logarithmus im wesentlichen der Faktor

$$\sqrt{\frac{v_K}{v_g}} = \frac{Z e^2}{\hbar v} = \frac{a Z}{\beta}.$$

Er wird im Grenzfall  $h \rightarrow 0$ , in dem die wellenmechanische Formel in die klassische übergehen müßte, gerade groß. Zur Klärung der Frage, ob (6) tatsächlich in höherer wellenmechanischer Näherung herauskommt, wurde das Problem noch einmal aufgegriffen. Dabei braucht man nur von Sommerfelds Arbeit<sup>7</sup> und anschließenden Arbeiten von Sommerfeld und Maué<sup>10</sup> und von Elwert<sup>11</sup> auszugehen.

Nach Sommerfeld ist nämlich der Absorptionskoeffizient für den Übergang zwischen zwei kontinuierlichen Zuständen<sup>12</sup>

$$\mu = \frac{8\pi^2 c^2 \nu}{3c} |N|^2 \int |\mathfrak{M}|^2 d\omega. \quad (7)$$

$|N|^2$  enthält die Normierungsfaktoren der Wellenfunktionen,  $\mathfrak{M}$  ist das Matrixelement des Elementarprozesses, bei dem das Elektron unter Emission eines Lichtquants in eine bestimmte Richtung wegfliegt. Das Integral bedeutet die Summation über die Austrittsrichtungen des Elektrons, dessen Wellenzahlen beim Ein- und Austritt mit  $k_1$  und  $k_2$  bezeichnet sind. Die Integration läßt sich exakt ausführen und ergibt<sup>13</sup>

$$\int |\mathfrak{M}|^2 d\omega = \frac{8\pi |A|^2}{x_0} \frac{d}{dx_0} |F|^2, \quad (8)$$

mit

$$|A|^2 = \frac{16\pi^2 x_0^2}{(k_1^2 - k_2^2)^4} e^{-2\pi|n_1|} \quad (9)$$

und

$$F = F(-n_1, -n_2, 1, x_0), \quad (10)$$

<sup>9</sup> Die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung verdanke ich Hrn. Prof. Unsöld.

<sup>10</sup> A. Sommerfeld u. A.-W. Maué, Ann. Physik **23**, 589 [1935].

<sup>11</sup> G. Elwert, Ann. Physik **34**, 178 [1939].

<sup>12</sup> A. Sommerfeld<sup>8</sup>, Kap. VI, 5, Gl. (27) u. (28). Der Einfachheit halber wird hier, wie im folgenden, nicht auf die Originalarbeiten, sondern auf die zusammenfassende Darstellung des Sommerfeldschen Buches Bezug genommen.

<sup>13</sup> A. Sommerfeld<sup>8</sup>, Kap. VII, 5, Gl. (3) u. (11).

wobei  $F$  die gewöhnliche hypergeometrische Funktion mit den Argumenten

$$n_1 = \frac{aZ}{i\beta_1}, \quad n_2 = \frac{aZ}{i\beta_2}, \quad x_0 = -\frac{4k_1 k_2}{(k_1 - k_2)^2} \quad (11)$$

ist. Da nach dem Energiesatz

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} h\nu \quad (12)$$

ist, kann man auch schreiben

$$|A|^2 = \frac{x_0^2 \hbar^6}{4m^4 \hbar^2 \nu^4} e^{-2\pi|n_1|}. \quad (13)$$

Für den Faktor  $|N|^2$  erhält man<sup>14</sup>

$$|N|^2 = \frac{m^3 Z^2 e^4}{2\pi \hbar^6 k_2} \frac{1}{(1 - e^{-2\pi|n_1|})(1 - e^{-2\pi|n_2|})}. \quad (14)$$

Die Variable  $x_0$  ist eine Funktion des Wellenzahlverhältnisses  $k_2/k_1$ ; dieses hängt nur von der auf die Grenzfrequenz  $\nu_g$  bezogenen Frequenz  $\nu$  ab. Nach (12) ist

$$\nu/\nu_g = 1 - (k_2/k_1)^2 \quad \text{oder} \quad k_2/k_1 = \sqrt{1 - (\nu/\nu_g)}. \quad (15)$$

Ist nun die emittierte bzw. absorbierte Frequenz  $\nu$  klein gegenüber der Grenzfrequenz  $\nu_g$ , d. h. gilt die

$$\text{Voraussetzung I: } \nu/2\nu_g \ll 1, \quad (16)$$

so erhält man

$$x_0 = -(4\nu_g/\nu)^2, \quad (17)$$

wobei

$$|x_0| \gg 1.$$

Dann ergibt sich nach Elwert<sup>11</sup> [Gl. (21)]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_0} |F|^2 &= |G|^2 \frac{2}{x_0} \left\{ \frac{2}{x_0 [1 - (n_1 - n_2)^2]} \right. \\ &\quad \left. - R e^{\frac{-i\varphi}{n_1 n_2}} \left( n_1 - n_2 - \frac{n_1^2 + n_2^2}{x_0} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

mit

$$|G|^2 = \frac{|n_1 n_2|}{\pi |n_1 - n_2|} \frac{\sin |n_1| \pi \sin |n_2| \pi}{\sin |n_1 - n_2| \pi} \quad (19)$$

und

$$\varphi = -\ln(-x_0) |n_1 - n_2| - 2 \arg \frac{\Gamma(n_1 - n_2)}{\Gamma(n_1) \Gamma(-n_2)}. \quad (20)$$

<sup>14</sup> A. Sommerfelds, Kap. VII, 8, Gl. (17). Die Normierungsfaktoren müssen aber streng verwendet werden, indem man auf die Formeln VI, 5, (5b) und II, 9, (32) zurückgeht.

Eine wesentliche Vereinfachung wird erzielt, wenn noch

$$|n_1 - n_2| \ll 1 \quad (21)$$

vorausgesetzt wird. Da aber unter Verwendung von Voraussetzung I

$$n_1 - n_2 = -n_1 \cdot 1/2(\nu/\nu_g), \quad (22)$$

so lautet diese

Voraussetzung II:

$$1/2(\nu/\nu_g) |n_1| \ll 1 \quad \text{oder} \quad 1/2(\nu/\nu_g) \frac{aZ}{\beta} \ll 1. \quad (23)$$

Sie ist identisch mit der Kramersschen Bedingung

$$\gamma_0 \ll 1.$$

Man erhält nun für das Integral (8) mit (13), (18) und (19)

$$\int |\mathfrak{M}|^2 d\omega = \frac{\hbar^4}{(2\pi)^2 m^4 \nu^4} \frac{(1 - e^{-2\pi|n_1|})(1 - e^{-2\pi|n_2|})}{|n_1 - n_2| \pi} \cdot \{ \sin \varphi - |n_1 - n_2| \cos^2 \varphi / 2 \}. \quad (24)$$

Indem man diesen Ausdruck in (7) einsetzt, (14) verwendet und wieder von der Voraussetzung II Gebrauch macht, erhält man die Formel für den Wirkungsquerschnitt

$$\mu = \frac{2\pi}{3c} \frac{Z^2 e^6}{m^2 h} \frac{1}{v} \frac{1}{v^3} \frac{1}{|n_1 - n_2| \pi} \cdot \{ \sin \varphi - |n_1 - n_2| \cos^2 \varphi / 2 \}. \quad (25)$$

Es handelt sich jetzt nur noch um die Bestimmung von  $\varphi$ . Hierzu braucht man das Argument der  $\Gamma$ -Funktion

$$\arg \Gamma(n_1 - n_2) = \arg \Gamma(i |n_1 - n_2|),$$

wobei  $|n_1 - n_2| \ll 1$  ist. Es gilt nun<sup>15</sup>

$$\arg(iy)! = -y C + \sum_1^\infty (\operatorname{tg} \vartheta_n - \vartheta_n),$$

mit  $\operatorname{tg} \vartheta_n = y/n \ll 1$  und  $C$  = Eulersche Konstante.

Es ergibt sich somit

$$\arg \Gamma(n_1 - n_2) = -|n_1 - n_2| C - \frac{\pi}{2}. \quad (26)$$

Andererseits ist unter Voraussetzung II

$$\Gamma(n_1) \Gamma(-n_2) = \Gamma(n_1) \Gamma(-n_1) [1 + (n_1 - n_2) \psi(-n_1)],$$

<sup>15</sup> Vgl. z. B. Jahnke-Emden, Funktionentafeln, 1933. Die Formel folgt direkt aus der Produktdarstellung der  $\Gamma$ -Funktion.

wobei

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

also

$$\arg \Gamma(n_1) \Gamma(-n_2) = \arg \{1 - |n_1 - n_2| J m \psi(i|n_1|) + i|n_1 - n_2| R e \psi(i|n_1|)\}. \quad (27)$$

Den Real- und Imaginärteil der  $\psi$ -Funktion rein imaginären Arguments kann man leicht aus der Produktdarstellung der  $\Gamma$ -Funktion entnehmen. Differenziert man

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{c_z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+z}{n} e^{-z/n}$$

logarithmisch, so erhält man

$$\psi(z) = -C - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)},$$

woraus folgt:

$$R e \psi(i|n_1|) = -C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n_1|^2}{n(n^2 + |n_1|^2)}, \quad (28a)$$

$$J m \psi(i|n_1|) = \frac{1}{|n_1|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n_1|}{n^2 + |n_1|^2}. \quad (28b)$$

Damit ergibt sich zunächst, daß

$$|n_1 - n_2| J m \psi(i|n_1|) = \frac{\nu}{2\nu_g} + |n_1 - n_2| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n_1|}{n^2 + |n_1|^2} \ll 1,$$

nach Voraussetzung I und II. Also wird in unserer Näherung

$$\arg \Gamma(n_1) \Gamma(-n_2) = |n_1 - n_2| R e \psi(i|n_1|), \quad (29)$$

und mit (17), (26) und (29)

$$\varphi = 2|n_1 - n_2| \left\{ \ln \frac{\nu}{4\nu_g} + C + R e \psi(i|n_1|) \right\} + \pi. \quad (30)$$

Nach Voraussetzung II wird nun

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= |n_1 - n_2| \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ &= -2|n_1 - n_2| \left\{ \ln \frac{\nu}{4\nu_g} + C + R e \psi(i|n_1|) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Für den Absorptionskoeffizienten erhält man also den Ausdruck

$$\mu = -\frac{4}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 h c} \frac{1}{v} \frac{1}{v^3} \left\{ \ln \frac{\nu}{4\nu_g} + C + R e \psi(i|n_1|) \right\}, \quad (32)$$

und für den  $g$ -Faktor

$$g'' = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \ln \frac{\nu}{4\nu_g} + C + R e \psi(i|n_1|) \right\}. \quad (33a)$$

Verwendet man (28a), so kann man auch schreiben

$$g'' = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \ln \frac{\nu}{4\nu_g} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n_1|^2}{n(n^2 + |n_1|^2)} \right\}. \quad (33b)$$

Diese Formel enthält nun die bisherige wellenmechanische Formel nach Gaunt und Maue und die korrespondenzmäßig-klassische Formel von Kramers als Grenzfälle. Es ist nämlich unter der weiteren

$$\text{Voraussetzung III: } |n_1| = \frac{aZ}{\beta} \ll 1,$$

$$g = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\nu}{4\nu_g}.$$

In diesem Grenzfall kann die Voraussetzung II wegfallen, da sie aus I und III folgt. Die Formel (6) von Gaunt und Maue gilt also bei kleinen Kernladungen und großen Geschwindigkeiten, sofern sie im Gültigkeitsgebiet der nichtrelativistischen Rechnung liegen.

Die klassische Formel muß für große Werte von  $aZ/\beta$  herauskommen. Aus dem asymptotischen Verhalten der  $\Gamma$ -Funktion entnimmt man, daß dann gilt:

$$\psi(i|n_1|) = \ln i|n_1|,$$

also

$$R e \psi(i|n_1|) = \ln |n_1|.$$

Somit ergibt sich aus (33a) unter der weiteren

$$\text{Voraussetzung IV: } |n_1| = \frac{aZ}{\beta} \gg 1,$$

$$g' = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{\nu}{4\nu_g} \zeta \frac{aZ}{\beta} \right),$$

wobei  $\ln \zeta = C$ .

In diesem Fall wird Voraussetzung I überflüssig, da II und IV eine schärfere Einschränkung für  $\nu/\nu_g$  ergeben als I. Die klassische Formel gilt also unter der Bedingung

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu_g} \frac{\alpha Z}{\beta} \ll 1$$

von Kramers, wenn noch  $\frac{\alpha Z}{\beta} \gg 1$  vorausgesetzt wird.

Zur Darstellung des Funktionsverlaufs von  $g''$  in Abhängigkeit von  $\alpha Z/\beta$  spalten wir (33) auf in

$$g'' = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \ln \frac{\nu}{4\nu_g} + \Phi \right\}, \quad (34)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Phi(|n_1|) &= \Phi\left(\frac{\alpha Z}{\beta}\right) = C + R e \psi(i|n_1|) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n_1|^2}{n(n^2 + |n_1|^2)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Man kann leicht einige Werte von  $\Phi$  berechnen und erhält dann die in Abb. 1 wiedergegebene Kurve. Zum Vergleich ist die entsprechende klassische Kurve

$$\Phi' = C + \ln \frac{\alpha Z}{\beta}$$

mit eingezeichnet. Man erkennt beispielsweise, daß die klassische Formel noch bis zu ziemlich kleinen Werten von  $\alpha Z/\beta$  praktisch gültig ist; die Abweichungen sind für  $\alpha Z/\beta = 1$  noch kaum merklich. Dieser Wert entspricht etwa der Strahlung der Milchstraße. Man hat bei ihrer Berechnung also konsequenterweise nicht die Gaunt-

Mauesche Formel, sondern die klassische zu verwenden. Hierauf wird in einer Berichtigung zu Unsöld's Arbeiten über die Theorie der Radiofrequenzstrahlung<sup>16</sup> näher eingegangen.

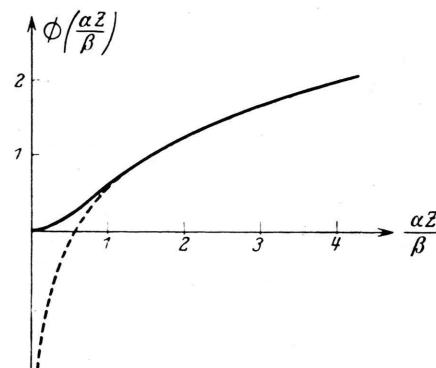


Abb. 1. Zur Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von  $\alpha Z/\beta$ . Ausgezogene Kurve  $\Phi = \text{Re } \psi\left(i \frac{\alpha Z}{\beta}\right) + C$ ; gestrichelte Kurve  $\Phi' = \ln \alpha Z/\beta + C$ .

Die vorstehenden Rechnungen sind im Anschluß an Geheimrat Sommerfelds Arbeiten über das kontinuierliche Röntgenspektrum entstanden. Der Verf. erlaubt sich daher, sie seinem verehrten Lehrer in dankbarer Erinnerung an seine Münchener Studienzeit zum 80. Geburtstage zu widmen.

<sup>16</sup> G. Burkhardt, G. Elwert u. A. Unsöld, Z. Astrophysik, im Erscheinen.

## Die Innentemperaturen der überdichten Zwerge und das Auftreten von Bose-Entartung

Von LUDWIG BIERMANN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 3a, 481—485 [1948]; eingegangen am 4. August 1948)

Die Temperatur des Inneren der überdichten Sterne unterhalb der Hauptreihe im Farbenhelligkeitsdiagramm wird mit den Mitteln der Theorie des Sternenaufbaus untersucht. Für die Sterne sehr geringer Leuchtkraft ( $< 10^{-4}$  derjenigen der Sonne) finden sich Werte um 1 Million Grad. Im Verein mit der überaus hohen Dichte bewirkt dies Entartung (im Sinne der statistischen Mechanik) nicht nur der freien Elektronen, sondern auch der leichtesten Atomkerne.

Bis vor etwa zehn Jahren waren nur wenige überdichte Sterne bekannt, die damals als „weiße Zwerge“ bezeichnet wurden, da sämtliche untersuchten Exemplare eine Oberflächentemperatur von etwa  $8000^\circ$  oder mehr aufwiesen. Inzwischen<sup>1</sup> hat man aber unter den Sternen großer

Eigenbewegung eine größere Anzahl absolut sehr lichtschwacher Sterne aller Farben gefunden, so daß die frühere Bezeichnung offenbar nicht mehr anwendbar ist. Da ihr wesentliches Charakteristi-

<sup>1</sup> S. Bericht in der Himmelswelt 55, 80 [1947] (nach Luyten, Monthly Astronom. Newsletters 31).